

## Table des matières

1	Résolution littérale d'un problème hyperstatique avec l'équation de déformation : cas de la poutre sur trois appuis .....	2
1.1	Isoler et modéliser la poutre .....	2
1.2	Remplacer les liaisons par les efforts inconnus .....	2
1.3	Réaliser le bilan des actions extérieures .....	3
1.4	Quatrième équation : équation de la déformée .....	3
1.5	Résolution statique .....	3
2	Degré d'hyperstaticité d'une structure plane .....	4
2.1	Liaisons externes ( $L_e$ ) .....	4
2.2	Liaisons internes ( $L_i$ ) .....	4
2.2.1	Toutes les barres sont encastrées sur le nœud .....	4
2.2.2	Toutes les barres sont articulées sur le nœud .....	5
2.2.3	Barres encastrées et barres articulées sur le nœud .....	5
2.3	Calcul du degré d'hyperstaticité ( $N$ ) .....	6
2.4	Applications .....	6
2.4.1	Portique statique .....	6
2.4.2	Portique hyperstatique .....	7
2.4.3	Ferme statique .....	7
2.4.4	Ferme hyperstatique .....	9

# 1 Résolution littérale d'un problème hyperstatique avec l'équation de déformation : cas de la poutre sur trois appuis

Considérons une panne reposant sur trois appuis. Elle est posée à dévers mais elle travaille en flexion simple car elle ne reprend que les charges perpendiculaires au rampant nommée «  $q_v$  » en kN/m. Les charges parallèles au rampant sont reportées par la panne faîtière par des chevrons continus.



Panne reposant sur trois appuis

Figure B52 : Exemple d'élément sur trois appuis (@ MBC (Maison Bois Cruard))

## 1.1 Isoler et modéliser la poutre

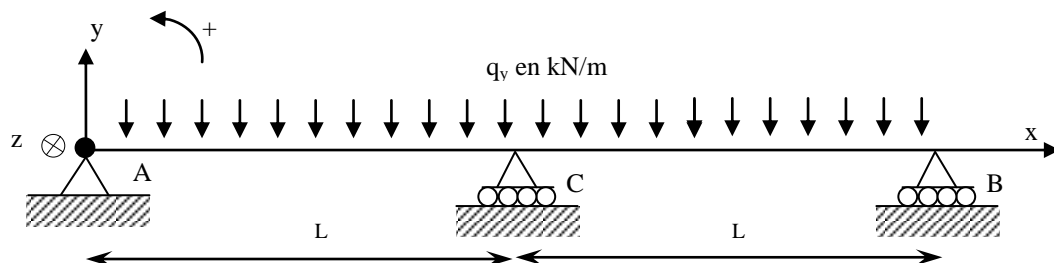


Figure B53 : Modélisation de la poutre

Le sabot de droite est modélisé en pivot, l'appui de la panne sur l'arbalétrier et le sabot de gauche en appui simple (figure B53).

## 1.2 Remplacer les liaisons par les efforts inconnus

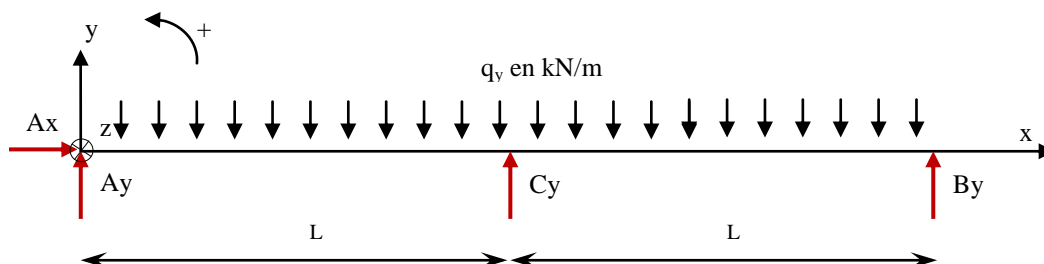


Figure B54 : Efforts extérieurs à la poutre

Les efforts inconnus sont placés en fonction de la nature des liaisons et toujours dans le sens positif du repère (figure 54).

- Au point A nous avons une liaison pivot, donc deux inconnues,  $A_x$  et  $A_y$ .
- Au point B nous avons un appui plan, donc une inconnue,  $B_y$ .
- Au point C nous avons un appui plan, donc une inconnue,  $C_y$ .

### 1.3 Réaliser le bilan des actions extérieures

Ce tableau permet de vérifier qu'il n'y a pas plus d'inconnues que d'équations de la statique (trois pour une étude plane). Le cas contraire, le problème ne peut pas être résolu sans équation supplémentaire.

Tableau B1 : bilan des actions extérieures

	A	$q_y$	C	B
Axe x	$A_x$	0	0	0
Axe y	$A_y$	connu	$C_y$	$B_y$
Moment dans la liaison	0	0	0	0

Il existe quatre inconnues ( $A_x$ ,  $A_y$ ,  $C_y$  et  $B_y$ ), la statique offre 3 équations ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M(\vec{F}) = 0$ ), l'étude nécessite une équation supplémentaire.

### 1.4 Quatrième équation : équation de la déformée

Afin de limiter les calculs, appliquons le principe de superposition (figure 55) :

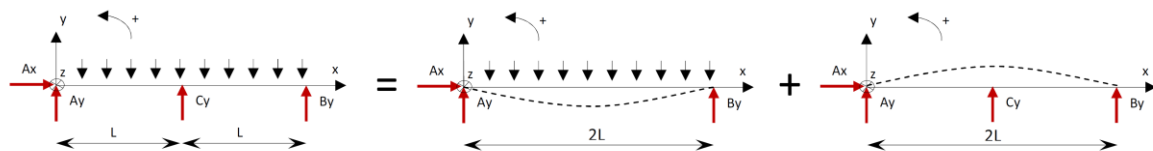


Figure B55 : Principe de superposition

$$0 = -\frac{5q_y(2L)^4}{384E_{0,mean}I_{Gz}} + \frac{C_y(2L)^3}{48E_{0,mean}I_{Gz}}$$

$$\frac{C_y 8L^3}{48E_{0,mean}I_{Gz}} = \frac{5q_y 16L^4}{384E_{0,mean}I_{Gz}}$$

$$C_y = \frac{5 \times 16 \times 48}{384 \times 8} q_y l = 1,25 q_y l$$

L'inconnue  $C_y$  est levée il ne reste que trois inconnues.

### 1.5 Résolution statique

Le chargement est vertical et symétrique. La méthode de calcul de la réaction aux appuis peut-être simplifiée car le chargement est vertical et symétrique.

- Chargement vertical : Aucun effort sur l'axe x,  $0 + Ax = 0$ ,  $Ax = 0$
- Chargement symétrique :  $Ay = By = \frac{2ql - 1,25ql}{2} = 0,375ql$

## 2 Degré d'hyperstaticité d'une structure plane

Une structure est composée de barres liées entre elles par des nœuds. Les liaisons entre la structure et un ensemble extérieur à la structure sont des liaisons externes. Les liaisons entre les barres et les nœuds sont des liaisons internes (Figure 56). Le degré d'hyperstaticité nommé « N » est le nombre d'inconnues de liaison moins le nombre d'équations de statique.

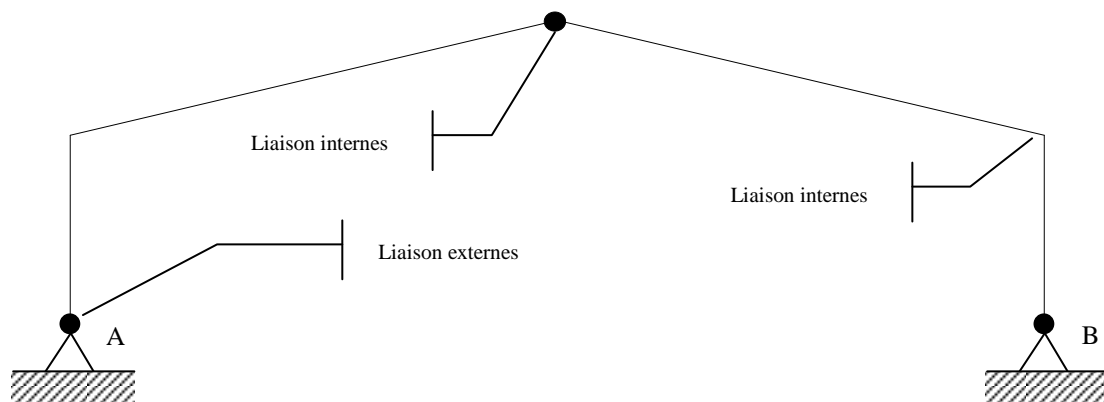


Figure B56 : Liaisons internes et externes

### 2.1 Liaisons externes (Le).

Les liaisons externes sont détaillées au chapitre « 1.2 Les principales liaisons employées dans le bâtiment ».

- la liaison « encastrement » comporte 3 inconnues :  $Le = 3$
- la liaison « articulation » comporte 2 inconnues :  $Le = 2$
- la liaison « appui simple » comporte 1 inconnue :  $Le = 1$

### 2.2 Liaisons internes (Li).

Trois cas de figure peuvent apparaître, toutes les barres sont encastrees sur le nœud, toutes les barres sont articulées sur le nœud ou il existe des barres encastrees et barres articulées sur le nœud

#### 2.2.1 Toutes les barres sont encastrees sur le nœud.

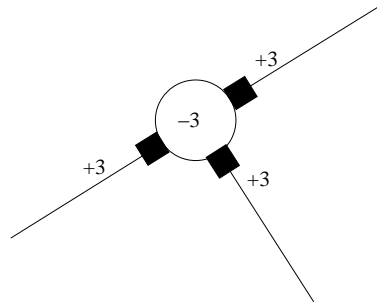
Chaque barre a 3 inconnues de liaison à l'encastrement et l'on dispose de 3 équations en appliquant le PFS au nœud (figure B57).

$$\text{Bilan : } Li = 3 + 3 + 3 - 3$$

Li : Nombre d'inconnues des liaisons internes

«  $3 + 3 + 3$  » : nombre d'inconnues liées aux encastremets

« - 3 » : nombre d'équations de la statique



*Figure B57 : Barres encastrées sur le nœud*

### 2.2.2 Toutes les barres sont articulées sur le nœud.

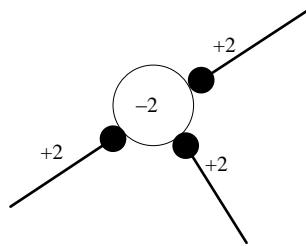
Chaque barre a 2 inconnues de liaison à l'articulation et l'on dispose de 2 équations (car l'équation des moments est nulle) en appliquant le PFS au nœud (figure B58).

Bilan :  $Li = 2 + 2 + 2 - 2$

Li : Nombre d'inconnues des liaisons internes

« 2 + 2 + 2 » : nombre d'inconnues liées aux encastresments

« - 2 » : nombre d'équations de la statique



*Figure B58 : Barres articulées sur le nœud*

### 2.2.3 Barres encastrées et barres articulées sur le nœud.

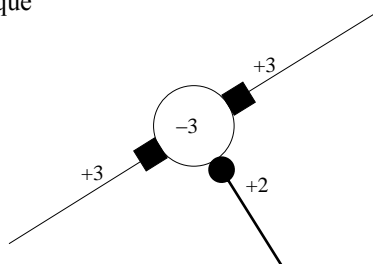
Deux barres ont 3 inconnues de liaison à l'encastrement et une barre a 2 inconnues de liaison à l'articulation. Par ailleurs l'on dispose de 3 équations en appliquant le PFS au nœud (figure B59).

Bilan :  $Li = 3 + 3 + 2 - 3$

Li : Nombre d'inconnues des liaisons internes

« 3 + 3 + 2 » : nombre d'inconnues liées aux encastresments

« - 3 » : nombre d'équations de la statique



*Figure B58 : Barres encastrées et articulées sur le nœud*

## 2.3 Calcul du degré d'hyperstaticité (N)

Le nombre d'équations correspondant à l'équilibre des barres est de trois fois le nombre de barre.

- Nb équations = 3 x b (b : nombre de barre)

Le degré d'hyperstaticité (N) se calcul par la formule :

$$N = \sum Le + \sum Li - 3b$$

Avec :

- $\sum Le$  : somme des liaisons externes.
- $\sum Li$  : somme des liaisons internes.
- b : nombre de barre

## 2.4 Applications

Cette méthode est illustrée avec le calcul du degré d'hyperstaticité d'un portique et d'une ferme. Deux études sont proposées pour chaque cas avec une structure statique et hyperstatique.

### 2.4.1 Portique statique

Reprenons le portique étudié au chapitre 1.3.5 « Structure triangulée : portiques à trois articulations ». Les ferrures en pieds de poteaux sont des liaisons pivots, les couronnes de boulons forment un encastrement entre le poteau et l'arbalétrier et les arbalétriers sont assemblés avec une ferrure formant une liaison pivot au faîtage (figures 59 et 60).



Figure B59 : Exemple de portique statique (Charpente Fournier 3 @ Charpentes Fournier)

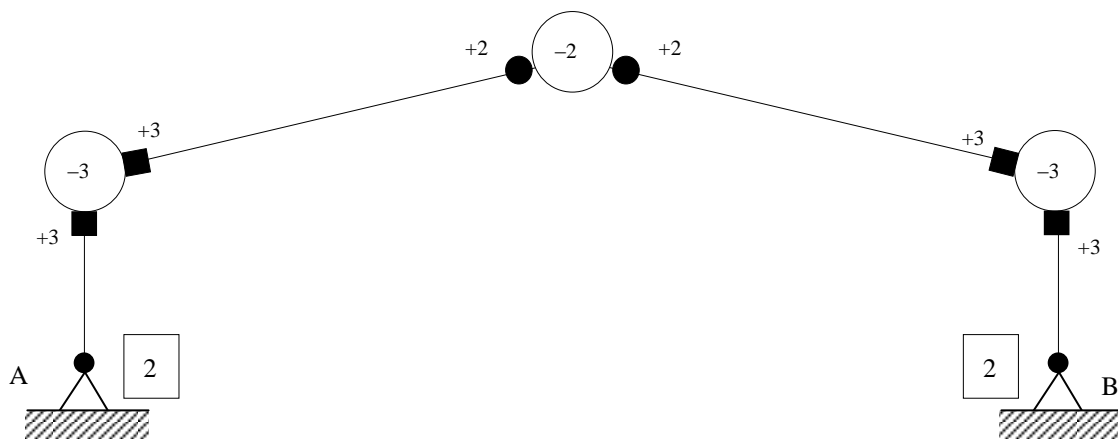


Figure B60 : Nombre d'inconnues des liaisons externes et internes

$$N = \sum Le + \sum Li - 3b$$

$$N = (2 + 2) + [2(3 + 3 - 3) + (2 + 2 - 2)] - 3 \times 4$$

$$N = 0$$

La structure est statique.

### 2.4.2 Portique hyperstatique

Considérons un portique à deux articulations formé par deux poteaux et une poutre à inertie variable. Les ferrures en pieds de poteaux sont des liaisons pivots et les couronnes de boulons forment un encastrement entre le poteau et la poutre à inertie variable (figures 61 et 62).



Figure B61 : Exemple de portique hyperstatique (@ Charpentes Fournier)

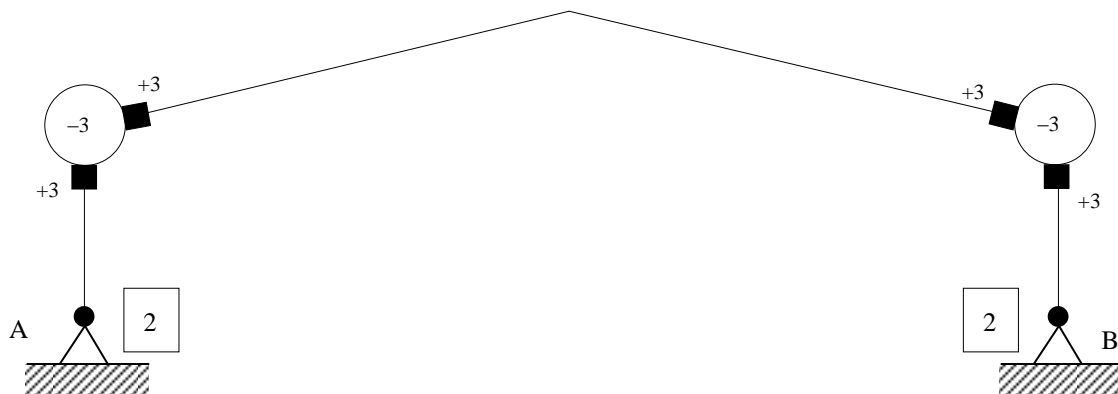


Figure B62 : Nombre d'inconnues des liaisons externes et internes

$$N = \sum Le + \sum Li - 3b$$

$$N = (2 + 2) + [2(3 + 3 - 3)] - 3 \times 3$$

$$N = 1$$

La structure est hyperstatique d'ordre 1.

### 2.4.3 Ferme statique

Reprenons la ferme du préau étudié au chapitre 1.3.4 « Structure triangulée : cas du treillis ». La structure est triangulée avec deux arbalétriers, deux contrefiches, un poinçon et un entrain (figure B63). Les assemblages à

chaque extrémité de toutes les pièces sont réalisés avec des tenons-mortaises et des boulons. Ces assemblages par tenons-mortaises et boulons sont modélisés en pivot car ils permettent une rotation de quelques degrés. Afin d'obtenir un système résoluble par la statique, chaque extrémité des barres doit être modélisée par pivot et chaque barre doit appartenir à un triangle pour former un treillis. Cela revient à « couper » les arbalétriers et l'entrait et de les assembler avec une liaison pivot (figure B64).



Figure B63 : Ferme étudiée (@ Leduc Structure Bois)

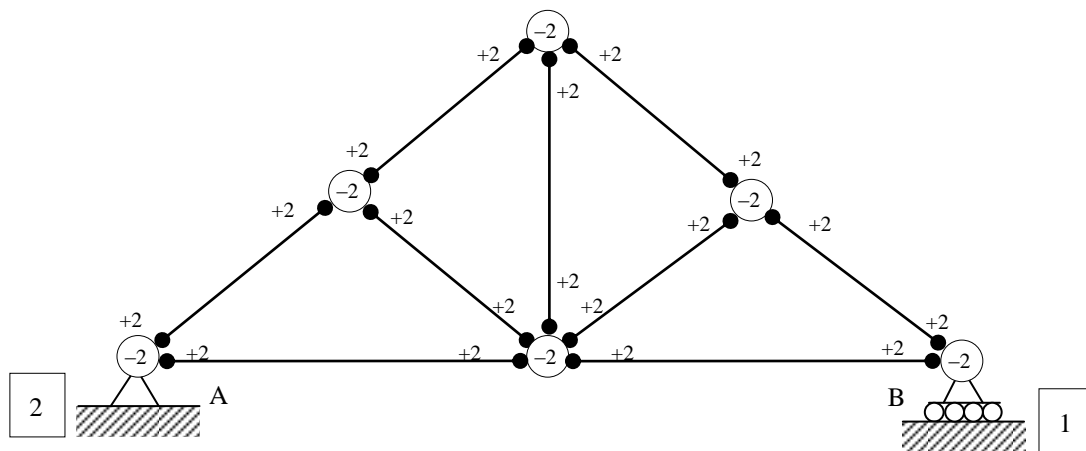


Figure B64 : Nombre d'inconnues des liaisons externes et internes

$$N = \sum Le + \sum Li - 3b$$

$$N = (2 + 1) + [(2 + 2 + 2 + 2 + 2 - 2) + 3(2 + 2 + 2 - 2) + 2(2 + 2 - 2)] - 3 \times 9$$

$$N = 0$$

La structure est statique.



## 2.4.4 Ferme hyperstatique

Reprenons la ferme du préau étudié au chapitre 4.4.3 « Ferme statique ». La structure est triangulée avec deux arbalétriers, deux contrefiches, un poinçon et un entrait (figure B63). Les assemblages à chaque extrémité de toutes les pièces sont réalisés avec des tenons-mortaises et des boulons. Ces assemblages par tenons-mortaises et boulons sont modélisés en pivot car ils permettent une rotation de quelques degrés. Afin d'être conforme à la réalité les arbalétriers et l'entrait ne sont pas coupés. La continuité des arbalétriers et de l'entrait est respectée (figure B65).



Figure B63 : Ferme étudiée (@ Leduc Structure Bois)

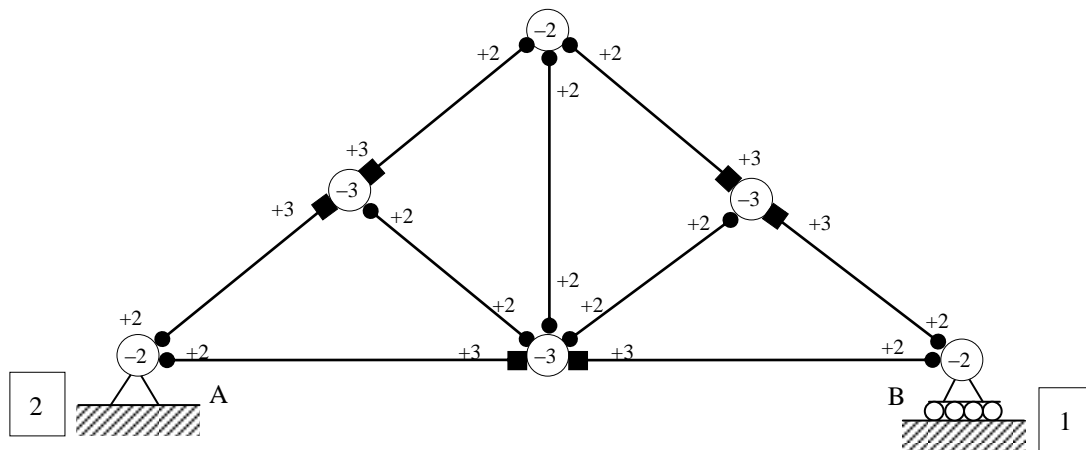


Figure B65 : Nombre d'inconnues des liaisons externes et internes

$$N = \sum Le + \sum Li - 3b$$

$$N = (2 + 1) + [(3 + 3 + 2 + 2 + 2 - 3) + (2 + 2 + 2 - 2) + 2(3 + 3 + 2 - 3) + 2(2 + 2 - 2)] - 3 \times 9$$

$$N = 3$$

La structure est hyperstatique d'ordre 3.